

Für $f \in C^2$ kann man Konvexität -42-
folgendermaßen prüfen.

Satz 20.7: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und Konvex.

Sei $f \in C^2(U)$. Dann gilt:

(i) f Konvex $\iff D^2 f(x)$ positiv
semidefinit $\forall x \in U$

(ii) $D^2 f(x)$ positiv definit auf $U \implies$
 f streng Konvex

[analog " (streng) Konkav "]

Beweis: nur (i)

$\Leftarrow$ " Seien $x, x_0 \in U \xrightarrow{\text{Taylor}}$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \\ \frac{1}{2} f''(x_0 + \vartheta(x - x_0)) (x - x_0, x - x_0)$$

mit einem $\vartheta \in (0,1)$; das Vorzeichen
von f'' liefert

$$f(x) \gg f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0);$$

nun benutze Satz 20.6.

$\Rightarrow$ " : indirekt

Sei $f^{(2)}$ nicht positiv semidefinit auf $U \Rightarrow$

$\exists x_0 \in U, v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ mit

$$f^{(2)}(x_0)(v, v) < 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(2)} \text{ stetig}$$

$$\exists \delta > 0 : (*) f^{(2)}(y)(v, v) < 0 \quad \forall y \text{ mit } |x_0 - y| < \delta$$

Sei $w := \pm v, \pm \neq 0, |\pm| < \delta$.

$$\Rightarrow x = x_0 + w \in B_\delta(x_0)$$

nun benutzt Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot w + \int_0^1 (1-\rho) f^{(2)}(\underbrace{x_0 + \rho w}_{\in B_\delta(x_0)})(w, w) d\rho$$

$$= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot w + \frac{L}{2} \int_0^1 (1-\rho) f^{(2)}(x_0 + \rho w)(v, v) d\rho$$

$$< f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot w$$

(*)

Da f konvex ist, widerspricht die letzte Ungleichung Satz 20.6 (i).



§21 Umkehrsatz, implizit definierte Funktionen

Vereinbarung : X, Y normierte $\mathbb{R}$ -V.R.
mit $\dim < \infty$

„lineare Situation“ : Sei $f: X \rightarrow Y$ eine
lineare Abbildung. Wann ist f
bijektiv, also umkehrbar mit linearer
Inverser $f^{-1}: Y \rightarrow X$?

notwendig dafür: $\dim X = \dim Y$

Dann kann man o.E. $X = Y$ annehmen
und weiß:

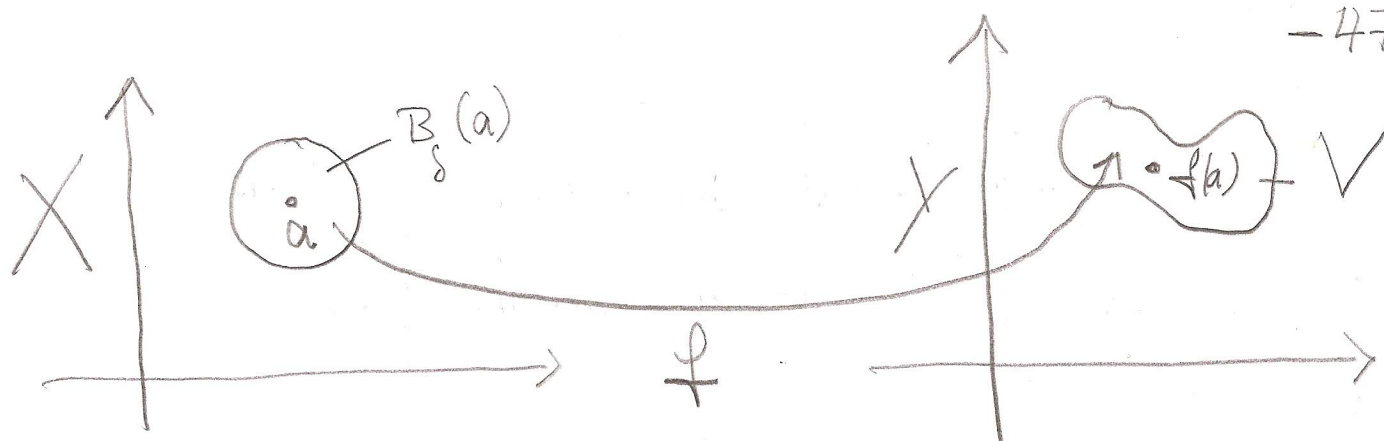
Satz :

$$\det f \neq 0 \iff f \text{ bijektiv}$$

// nichtlineare Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ //

∴ a. ist es sehr schwer zu entscheiden, ob f global invertierbar (= Bijektion) ist. Man fragt schwächer, ob f zumindest lokal diese Eigenschaft hat.

präzise : Sei $a \in X$. Gibt es eine Kugel $B_\delta(a)$, die von f bijektiv auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ in Y abgebildet wird?



- Falls ja und -falls f auf $B_\delta(a)$ diff'bar ist, so kann man weiter fragen:

Ist auch $\left(f|_{B_\delta(a)} \right)^{-1}: V \rightarrow B_\delta(a)$
diff'bar?

- Falls ja, so folgt (Analysis II)

$$\left(\left[f|_{B_\delta(a)} \right]^{-1} \right)'(f(a)) = \left(f'(a) \right)^{-1}$$

(Anwendung der Kettenregel)

D.h. : Die lineare Abbildung

$$\varphi'(a) : X \rightarrow Y$$

muss invertierbar sein, was wieder

$$\dim X = \dim Y$$

erzwingt.

Im „Umkehrsatz“ wird nun gerade gezeigt:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{C}^1 \text{ nahe } a, \det \varphi'(a) \neq 0 \\ \implies \text{positive Antwort auf alle} \\ \text{Fragen} \end{array} \right.$$

~~Wichtig!~~

Zuvor noch ein Rückblick auf den

reellen Fall : Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen

Intervall, $a \in I$, und

$$\boxed{\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}) \text{ mit } \varphi'(a) \neq 0}$$

O. E. $\varphi'(a) > 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0: \varphi' > 0$ auf $(a-\delta, a+\delta)$

$\Rightarrow \varphi$ streng wachsend $-||-$;

aus Satz 9.4 folgt:

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi|_{(a-\delta, a+\delta)} \end{array} \right.$ hat eine stetige

Umkehrfunktion $g: (\varphi(a-\delta), \varphi(a+\delta)) \rightarrow (a-\delta, a+\delta)$;

aus Satz 11.6 folgt: $g \in C^1$

M. a. W. : Für $n = 1$ gilt der

Umkehrsatz.

Allgemeine Fassung:

Satz 21.1 (Umkehrsatz)

Seien X, Y $\mathbb{R}$ -V.R. mit

$$\dim X, \dim Y < \infty,$$

U sei offen in X und

$$f \in C^l(U, Y)$$

für ein $l \geq 1$. Sei $a \in U$, und

$$f'(a): X \rightarrow Y$$

sei bijektiv $\Rightarrow \dim X = \dim Y$!].

Dann bildet f eine offene Umgebung

Ω von a in U bijektiv auf

eine offene Umgebung V von $f(a)$

in Y ab. Die Umkehrfunktion

$$g: V \rightarrow \Omega, g := (f|_{\Omega})^{-1},$$

gehört zur Klasse $C^l(V, \Omega)$ mit

$$g'(y) = [f'(x)]^{-1}, \quad f(x) = y, \quad x \in \Omega.$$

Bem: Im Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ lautet die Voraussetzung

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0.$$

Wir brauchen zwei Hilfssätze, die wir für den Euklidischen Fall formulieren (Isomorphie $X \cong \mathbb{R}^n$, n passend).

Lemma 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in$

$C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $a \in U$. Dann gibt es zu

jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U$

und $|f(x) - f(y)| \leq (\|f'(a)\| + \varepsilon) |x - y|$

für alle $x, y \in B_\delta(a)$.

$|\cdot|$ = jeweils Eukl. Norm,

$\|\cdot\|$ = zugehörige Operatornorm

„lokale Lipschitz Bdg. bei a“

Beweis von Lemma 1: f' stetig in $a \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: (*) \quad \|f'(x) - f'(a)\| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in B_\delta(a)$; sei $\varepsilon > 0$ gegeben;

für $x, y \in B_\delta(a)$ folgt (Hauptsatztrick):

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x)) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f'(x + t(y-x)) (y-x) dt \right| \leq$$

$$\int_0^1 \underbrace{\|\varphi'(x+t(y-x))\|}_{\leq \varepsilon + \|\varphi'(a)\|} dt \cdot |y-x|$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon + \|\varphi'(a)\|,$$

da $x+t(y-x) \in \mathcal{B}_\delta(a)$ □

Lemma 2: Die Vor. von Lemma 1 seien erfüllt mit $\boxed{m=n}$. Es gelte:

$$\det \varphi'(a) \neq 0.$$

Dann folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit („Injektivität lokal“)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq \left(\frac{1}{\|\varphi'(a)^{-1}\|} - \varepsilon \right) |x-y| \\ \forall x, y \in \mathcal{B}_\delta(a). \end{array} \right.$$

Bem: $\varphi'(a)$ regulär $\implies \|\varphi'(a)^{-1}\| > 0$

Beweis von Lemma 2: Sii

-54-

$$g(x) := f(x) - f'(a)x$$

$\Rightarrow g'(a) = 0$; Lemma 1 für g liefert:

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon |x - y| \quad \forall x, y \in B_\delta(a);$$

wegen

$$f(x) - f(y) = g(x) - g(y) + f'(a)(x - y)$$

folgt:

$$|f(x) - f(y)| \geq |f'(a)(x - y)| - |g(x) - g(y)|$$
$$\geq |f'(a)(x - y)| - \varepsilon |x - y|$$

nun beachte:

$$|x - y| = |f'(a)^{-1}(f'(a)(x - y))|$$
$$\leq \|f'(a)^{-1}\| |f'(a)(x - y)| \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} |x - y| - \varepsilon |x - y|$$

